جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
هشتمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک سال ۱۳۹۰

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۳۵	–	۱۸۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب آزاد است.

تذکرات پیش از آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمندیم به موارد زیر توجه فرمایید:

- لطفاً مشخصات، کد آموزشگاه و کد دانش‌آموزی خود را آن طوری که در پاسخ‌نامه از شما خواسته‌شده، به‌دقت در محل مربوط بنویسید.
- لطفاً در پر کردن ردیف مربوط به تاریخ تولد دقت کنید.
- کد دفترچه سؤال شما (۱) است که لازم است این عدد را در پاسخ‌نامه در محل مربوط علامت بزنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد توجه کنید، کد دفترچه سؤال شما که در بالای هر صفحه نوشته‌شده، با کد اصلی که در این صفحه است برابر باشد.
- این آزمون شامل ۳۵ سؤال چهارگزینه‌ای و وقت آن ۳ ساعت است.
- استفاده از ماشین‌حساب مهندسی که قابل‌برنامه‌ریزی نیست، مجاز است.
- استفاده از جدول‌های نجومی، اطلس‌ها و آلماناک‌ها به هر شکل که باشند، مجاز نیست.
- در قسمت سؤال‌های چندگزینه‌ای، پاسخ‌های غلط نمره‌ی منفی دارند. هر سؤال فقط یک جواب درست دارد. علامت زدن بیش از یک گزینه برای یک سؤال، نمره‌ی منفی را دو برابر خواهد کرد؛ حتی اگر یکی از گزینه‌های علامت زده‌شده درست باشد.
- پاسخنامه را تمیز نگه‌دارید از تا کردن آن خودداری کنید. فقط در آنجایی که از شما خواسته‌شده، چیزی بنویسید یا علامت بزنید. هرگز در پشت پاسخ‌نامه چیزی ننویسید. هر نوشته یا علامت نامربوط، ممکن است دستگاه علامت‌خوان را به‌اشتباه بی اندازد.
- به همراه داشتن تلفن همراه یا هرگونه وسیله‌ی ارتباطی دیگر مجاز نیست.
- نتایج این مرحله از آزمون المپیاد، اواخر اسفندماه اعلام خواهد شد.
- پاسخنامه‌ی این آزمون توسط **محمد حسین الماسی، یاشار بهمند، کامبیز خالقی، فرنیک نیک‌اختر** تهیه شده است.

www.MAAKH.ir

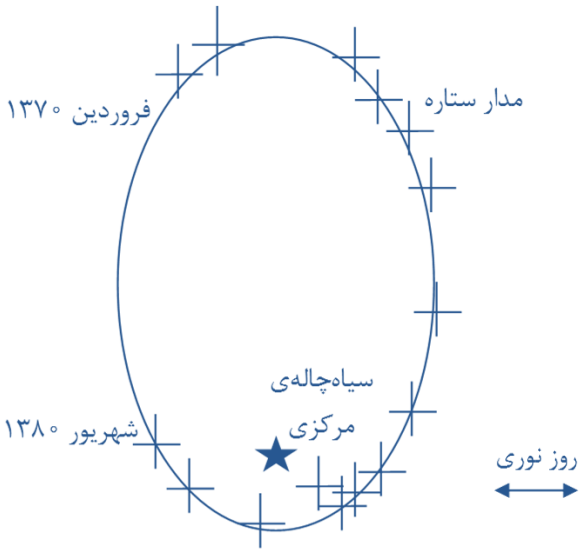
کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

ثابت‌های فیزیکی و نجومی

G	ثابت جهانی گرانش	$m^{۳}kg^{-۱}s^{-۲}$	$۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$
σ	ثابت استفان بولتزمان	$Wm^{-۲}K^{-۴}$	$۵/۶۷\times۱۰^{-۸}$
k_B	ثابت بولتزمان	$JK^{-۱}$	$۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}$
h	ثابت پلانک	Js	$۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}$
c	سرعت نور	$ms^{-۱}$	$۳/۰۰\times۱۰^{۸}$
eV	الکترون‌ولت	J	$۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$
	سال نجومی	$days$	$۳۶۵/۲۶$
pc	پارسک	m	$۳/۰۹\times۱۰^{۱۶}$
Au	واحد نجومی	m	$۱/۵۰\times۱۰^{۱۱}$
Ly	سال نوری	m	$۹/۴۶\times۱۰^{۱۵}$
$R_\odot$	شعاع خورشید	m	$۶/۹۶\times۱۰^{۸}$
$R_\oplus$	شعاع شعاع زمین	m	$۶/۳۸\times۱۰^{۶}$
	شعاع مشتری در استوا	m	$۷/۱۵\times۱۰^{۷}$
	شعاع ماه	m	$۱/۷۴\times۱۰^{۶}$
	شعاع مداری ماه	m	$۳/۸۴\times۱۰^{۸}$
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	$۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	$۵/۹۷\times۱۰^{۲۴}$
	جرم مشتری	kg	$۱/۹۰\times۱۰^{۲۷}$
$T_\odot$	دمای خورشید	K	$۵/۷۹\times۱۰^{۳}$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	$۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}$
	ثابت خورشیدی	$Wm^{-۲}$	$۱/۳۷\times۱۰^{۳}$
	قدر مطلق بولومتریک خورشید		$۴/۷۲$
$m_\odot$	قدر ظاهری خورشید		$-۲۶/۸$
	قدر ظاهری ماه بدر		$-۱۲/۷$
	عمر خورشید	$years$	$۱۰^{۱۰}$
$H_\circ$	ثابت هابل	$Kms^{-۱}Mpc^{-۱}$	۷۰

۱- با توجه به اطلاعات موجود در شکل به سؤال زیر پاسخ دهید.

مدار ستاره‌ای در نزدیکی مرکز یک کهکشان به‌صورت شکل مقابل است. مقیاس طول مشخص‌شده در شکل برابر با یک **روز نوری** است. جرم سیاه‌چاله‌ی مرکزی کهکشان برحسب جرم خورشیدی به‌طور تقریبی به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟



الف) ۱

ب) $۱۰^{۳}$

ج) $۱۰^{۶}$

د) $۱۰^{۹}$

۲- یک خوشه‌ی ستاره‌ای حاوی ۲۰۰ ستاره داغ از نوع $F۵$ در رشته اصلی، با قدر مطلق $M_v = +۳/۳$ و ۲۰ ستاره غول قرمز از نوع $KOIII$ با قدر مطلق $M_v = +۰/۷$ است. مقدار قدر مطلق این خوشه کدام است؟

الف) $-۳/۲۵$ ب) $-۴/۵۶$ ج) $-۲/۵۶$ د) $-۱/۷۲$

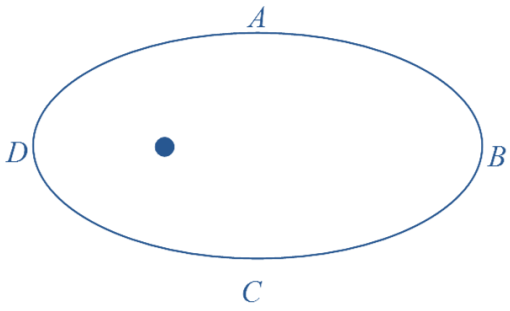
۳- می‌دانیم که شدت نور ستاره در ناحیه‌ی مرئی به مقدار e^{-k_λ} در اثر جذب غبار و مواد میان ستاره‌ای تاریک‌تر می‌شود. قدر ظاهری آن‌ها در ناحیه‌ی مرئی چه مقدار تغییر می‌کند؟

الف) $-۱/۱\ k_\lambda$ ب) $-۲/۵\ k_\lambda$ ج) $۱/۱\ k_\lambda$ د) $۲/۵\ k_\lambda$

۴- سیاره‌ای در مداری بیضی‌شکل با خروج از مرکز $e = ۰/۱$ به دور ستاره‌ای می‌چرخد. نسبت دمای روزانه بیشینه به دمای کمینه‌ی سیاره، ناشی از حرکت مداری آن کدام است؟

الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ج) $\frac{۱۱}{۹}$ د) $\sqrt{\frac{۱۱}{۹}}$

۵- یکی از سیارات منظومه شمسی با خروج از مرکز $\frac{\pi}{۳۰}$ در مدارش به دور خورشید می‌چرخد. نسبت مدت‌زمان طی مسیر ABC به مدت‌زمان طی مسیر CDA چقدر است؟



الف) $\frac{۳۱}{۲۹}$ ب) ۱

ج) $\frac{۸}{۷}$ د) $\frac{۲۹}{۳۱}$

۶- یک مکعب به ضلع یک سانتی‌متر از جنس زغال داریم. آن را آن‌قدر گرم می‌کنیم تا بیشینه‌ی طول‌موج مؤثر آن ۲۰۰۰ نانومتر شود. مقدار توان تابش شده از این تکه زغال چقدر است؟

الف) اطلاعات مسئله ناقص است. ب) ۱۵۰ وات ج) ۱۰۰ وات د) ۲۵ وات

۷- در مورد ماهواره‌هایی که با آنتن‌های ثابت سیگنالشان دریافت می‌شود کدام گزینه درست است؟

الف) در فاصله‌ی ۳۵۷۸۶ کیلومتری از سطح زمین و الزاماً در میل صفر

ب) در فاصله‌ی ۳۵۷۸۶ کیلومتری از سطح زمین ولی نه الزاماً در میل صفر

ج) در فاصله‌ی ۴۲۱۶۱ کیلومتری از سطح زمین و الزاماً در میل صفر

د) در فاصله‌ی ۴۲۱۶۱ کیلومتری از سطح زمین ولی نه الزاماً در میل صفر

۸- در اتم هیدروژن انرژی حالت پایه $E_{\circ} = ۱۳/۶$ الکترون‌ولت است. خط طیفی که ستاره‌ها در گذار از لایه‌ی برانگیخته‌ی چهارم به لایه‌ی برانگیخته‌ی دوم دارند چه طول‌موجی دارد و در چه ناحیه طیفی است؟ (انرژی تراز nاُم برابر است با $E_n = \frac{E_{\circ}}{n^۲}$)

الف) ۱۲۱/۶ nm- فرابنفش ب) ۴۸۶/۴ nm- مادون‌قرمز

ج) ۷۸۴/۹ nm- مرئی د) ۱۵۲/۵ nm- فرابنفش

۹- در مورد خطوط میدان مغناطیسی زمین کدام گزینه نادرست است.

الف) یکی از عوامل ایجاد پدیده شفق قطبی وجود میدان مغناطیسی زمین است.

ب) میدان مغناطیسی زمین در نواحی قطبی ضعیف‌تر از نواحی استوایی است.

ج) شمال مغناطیسی تقریباً در جنوب جغرافیایی و جنوب مغناطیسی تقریباً در شمال جغرافیایی قرار دارد.

د) محور مغناطیسی زمین بر محور دورانی آن منطبق نیست.

۱۰- به دلیل پدیده‌ی ابیراهی ستاره‌ای ناشی از حرکت وضعی زمین (چرخش زمین به دور خود)، انحرافی در محل ظاهری ستارگان از دید ناظر زمینی ایجاد می‌شود. مقدار بیشینه‌ی این انحراف چقدر است؟

الف) ۲۲+ ثانیه‌ی قوسی ب) ۰/۳۲+ ثانیه‌ی قوسی

ج) ۴۴+ ثانیه‌ی قوسی د) ۰/۶۴+ ثانیه‌ی قوسی

۱۱- در تهران (عرض جغرافیایی ۳۵°) چه کسری از آسمان را ستاره‌های **دورقطبی** پوشانده‌اند؟ (ستاره‌های دورقطبی در طول شب طلوع و غروب ندارند)

الف) ۰/۳۵ ب) ۰/۵۵ ج) ۰/۱۸ د) ۰/۴۳

۱۲- شتاب گرانشی کهکشان راه‌شیری در فاصله‌ی ۱۰ کیلو پارسک از مرکز آن تقریباً چند برابر شتاب گرانشی خورشید در محل سیاره‌ی نپتون است؟

الف) $۱۰^{-۲}$ ب) $۱۰^{-۴}$ ج) $۱۰^{-۶}$ د) $۱۰^{-۸}$

۱۳- اگر ستاره مانند خورشید، در جهت عمود بر صفحه‌ی کهکشانی مانند راه‌شیری از آن عبور کند، با چه احتمالی ممکن است با ستاره‌ی دیگری از کهکشان برخورد کند؟ منظور از برخورد، عبور ستاره از فاصله‌ای کمتر از یک واحد نجومی از ستاره‌ی دیگر است. توزیع ستاره‌ها در کهکشان را یکنواخت در نظر بگیرید.

الف) $۱۰^{-۳}$ ب) $۱۰^{-۵}$ ج) $۱۰^{-۷}$ د) $۱۰^{-۹}$

۱۴- در سیستم واحدهای فیزیکی SI که طول برحسب متر، زمان برحسب ثانیه و جرم برحسب کیلوگرم است؛ مقدار ثابت گرانش نیوتن عبارت است از $G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$. در اجرام نجومی مانند خوشه‌های ستاره‌ای یا کهکشان‌ها مناسب‌تر آن است که از سایر واحدهای اندازه‌گیری استفاده شود. به‌عنوان مثال در یک خوشه‌ی ستاره‌ای طول برحسب پارسک، جرم برحسب جرم خورشیدی و زمان برحسب میلیون سال بیان می‌شوند. در چنین سیستمی از واحدها، مقدار عددی ثابت G تقریباً برابر کدام گزینه است؟

الف) ۵ ب) ۰/۵ ج) ۰/۰۵ د) ۰/۰۰۵

۱۵- توان تولیدی در واحد جرم ستاره‌ای مانند خورشید، تقریباً چند برابر توان تابشی در واحد جرم بدن انسان است؟

الف) $۱۰^{+۳}$ ب) ۱۰ ج) $۱۰^{-۲}$ د) $۱۰^{-۴}$

۱۶- می‌دانیم عالم از تابشی همگن، موسوم به تابش زمینه‌ی کیهان پر شده است. دمایی که به این تابش حرارتی نسبت می‌دهند تقریباً ۲/۷ درجه کلوین است. تعداد فوتون‌های تابش زمینه‌ی کیهان در هر سانتیمتر مکعب از عالم به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

الف) ۴×۱۰^{-۲} ب) ۴ ج) $۴ \times ۱۰^{+۲}$ د) $۴ \times ۱۰^{+۴}$

۱۷- دنباله‌داری در مدار خود به دور خورشید می‌گردد. سرعت این دنباله‌دار در اوج ۱۰ کیلومتر بر ثانیه و در حضیض ۸۰ کیلومتر بر ثانیه است. فاصله حضیض این دنباله‌دار چند ثانیه نوری است؟

الف) ۱ ب) ۱۰ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۰۰

۱۸- پرتو نوری از میدان گرانش ستاره‌ای به جرم ۲×۱۰^{۳۰} کیلوگرم و شعاع ۲×۱۰^{۳} کیلومتر به‌صورت شعاعی در حال دور شدن است. بسامد پرتو نور در فاصله‌های بسیار دور از ستاره تقریباً چند درصد نسبت به بسامد اولیه تغییر می‌کند؟

الف) ۰/۱ ب) ۱ ج) ۱۰ د) ۴۰

۱۹- حداکثر ارتفاع زهره از افق حدوداً چند درجه است؟ (فاصله زهره تا خورشید ۰/۷ واحد نجومی است.)

الف) ۲۵ ب) ۳۵ ج) ۴۵ د) ۵۵

۲۰- نسبت ماده‌ی تاریک به ماده‌ی روشن معمولاً در کدام‌یک از ساختارهای زیر بیشتر است؟

الف) خوشه‌های کروی ب) کهکشان‌های مارپیچی ج) کهکشان‌های بیضوی د) خوشه‌های کهکشان‌ها

۲۱- طولانی‌ترین خورشیدگرفتگی که می‌توان تصور کرد تقریباً چند ثانیه طول می‌کشد؟

طول قطر اطول زمین به دور خورشید: $۱/۴۹۶ \times ۱۰^{+۸}$ کیلومتر

خروج از مرکز زمین به دور خورشید: ۰/۰۱۶۷۱

طول قطر اطول ماه به دور زمین: $۳/۸۴ \times ۱۰^{+۵}$ کیلومتر

خروج از مرکز ماه به دور زمین: ۰/۰۵۴۹

شعاع ماه: ۱۷۳۷ کیلومتر

شعاع خورشید: $۶/۹۹ \times ۱۰^{۵}$ کیلومتر

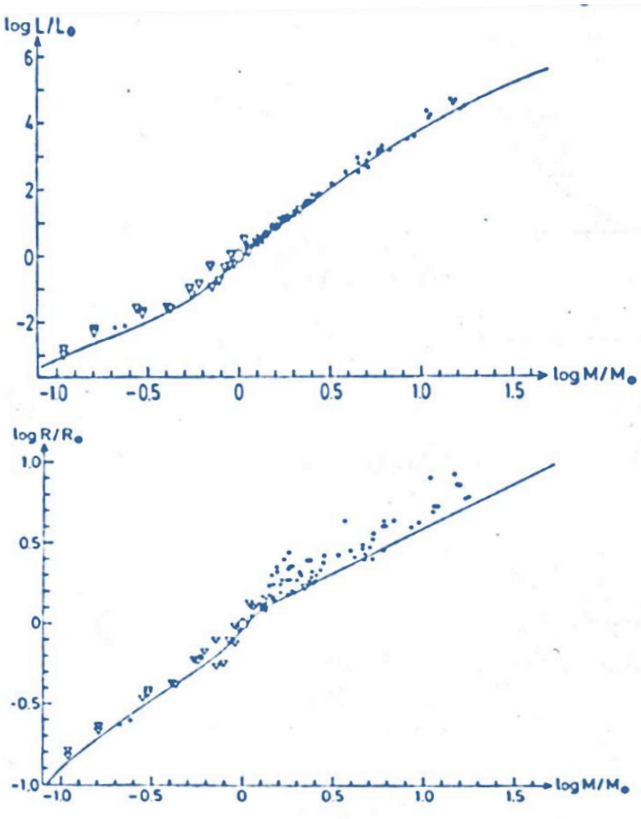
الف) ۶۰ ب) ۱۲۰ ج) ۱۸۰ د) ۲۴۰

۲۲- قطر مردمک چشم انسان را در آسمان تاریک ۷ میلی‌متر در نظر می‌گیریم. در این شرایط در یک ثانیه تقریباً چند هزار فوتون از ستاره‌ای با قدر ظاهری ۶ به چشم انسان می‌رسد؟

الف) ۱ ب) ۱۰ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۰۰

۲۳- بر اساس شبیه‌سازی ساختار درونی ستاره‌ها (منحنی توپر)، تغییرات شعاع و تابندگی برحسب جرم، برای ستاره‌هایی که به‌تازگی به رشته اصلی پیوسته‌اند، مطابق شکل‌های زیر به دست می‌آیند. شکل‌های زیر نمودارهای لگاریتم شعاع ستاره و لگاریتم تابندگی ستاره برحسب لگاریتم جرم ستاره هستند. داده‌های رصدی به‌صورت مثلث و دایره توپر مشخص شده‌اند. کدام گزینه می‌تواند جمله زیر را به‌درستی کامل کند؟

با توجه به این نمودارها، در جرم‌های بیشتر از خورشید، با افزایش جرم ستاره ..... شیب منحنی تابندگی برحسب دمای سطحی ..... .



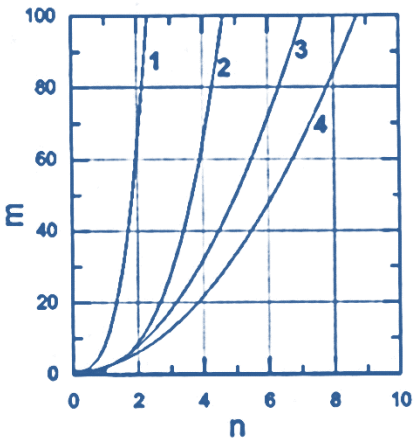
الف) الزاماً – افزایش می‌یابد.

ب) الزاماً – کاهش می‌یابد.

ج) ممکن است – کاهش یابد.

د) ممکن است – افزایش یابد.

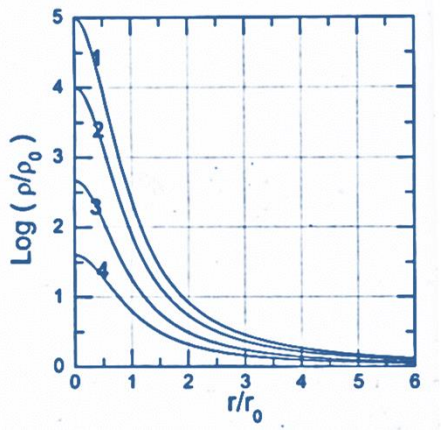
۲۴- شتاب گرانشی در سطح سیاره‌ای به شعاع R، ۹ برابر حالتی است که کل سیاره دارای چگالی یکنواخت ρ_0 فرض شود؛ بنابراین فرض می‌کنیم این سیاره دارای هسته مرکزی با چگالی یکنواخت $m\rho_0$ و شعاع $\frac{R}{n}$ باشد (چگالی ناحیه‌ی بیرون هسته مرکزی همان ρ_0 است). در این صورت کدام منحنی نحوه‌ی تغییرات m برحسب n را به‌درستی نشان می‌دهد؟



الف) منحنی ۱ ب) منحنی ۲

ج) منحنی ۳ د) منحنی ۴

۲۵- نمودار لگاریتم چگالی برحسب شعاع ۴ ستاره که تقریباً هم‌زمان به رشته اصلی پیوسته‌اند، داده‌شده است. ρ_0 و r_0 به ترتیب مقادیر ثابتی از جنس چگالی و شعاع هستند. کدام‌یک از این ستاره‌ها، رشته اصلی را دیرتر ترک خواهد کرد؟



الف) ستاره ۱

ب) ستاره ۲

ج) ستاره ۳

د) ستاره ۴

۲۶- فاصله کانونی عدسی چشمی (با میدان دید ۵ درجه) تقریباً چند میلی‌متر باشد تا خوشه کروی $M13$ با اندازه زاویه‌ای ۱۶/۶ دقیقه قوسی توسط یک تلسکوپ یک متری با فاصله کانونی ۱۵۰۰ میلی‌متر به‌طور کامل مشاهده شود؟

الف) ۵۰ ب) ۶۵ ج) ۷۰ د) ۸۵

۲۷- کدام صورت فلکی به‌طور کامل در آسمان قطب جنوب قابل‌مشاهده است؟

الف) نهنگ ب) سگ کوچک ج) سنبله د) کلاغ

۲۸- دمای فوتون‌های تابش پس‌زمینه‌ی کیهانی در زمان تشکیل، تقریباً چند درجه کلوین بوده است؟

الف) ۳ ب) ۳×۱۰^{۳} ج) ۳×۱۰^{۵} د) ۳×۱۰^{۷}

۲۹- در تصویربرداری نجومی توسط CCD، ثبت N فوتون توسط CCD با خطای $\sqrt{N}$ همراه است. زمان نوردهی توسط این CCD چقدر باشد

تا ستاره‌ای با قدر ۱۵ را با دقت ۰/۰۲ قدر توسط یک تلسکوپ یک متری نورسنجی کنیم.

* راهنمایی: فرض کنید شار فوتونی ثبت‌شده توسط این چیدمان برای ستاره‌ای با قدر ظاهری ۱۵، یک فوتون بر ثانیه بر سانتیمتر مربع است.

الف) ۲۴ / ۰ ثانیه ب) ۳۲ / ۰ ثانیه ج) ۴۰ / ۰ ثانیه د) ۴۸ / ۰ ثانیه

۳۰- فرض کنیم جدایی زاویه‌ای خوشه‌های کهکشانی گیسو و سنبله ۳۰ درجه است. ناظری که در خوشه‌ی سنبله قرار دارد، انتقال‌به‌سرخ خوشه‌ی گیسو را تقریباً چه مقدار اندازه‌گیری می‌کند؟

	انتقال‌به‌سرخ از دید ناظر زمینی
گیسو	$z \approx ۰/۰۲۰$
سنبله	$z \approx ۰/۰۰۴$

الف) ۰/۰۱۰ ب) ۰/۰۱۷ ج) ۰/۰۱۹ د) ۰/۰۲۱

۳۱- چیدمانی اپتیکی شامل یک تلسکوپ و یک آشکارساز CCD با مشخصات مندرج در جدول زیر را فراهم آورده‌ایم. میدان دید و حدِ تفکیک زاویه‌ای در تصاویر ثبت‌شده توسط این چیدمان به ترتیب کدام است؟

تلسکوپ

نسبت کانونی	$\frac{f}{۱۰}$
قطر دهانه تلسکوپ	۱۴ اینچ
آشکارسازی CCD	
ابعاد پیکسل (هر خانه تصویر)	۹ میکرومتر × ۹ میکرومتر
ابعاد فیزیکی CCD	۳۶/۰ میلی‌متر × ۲۴/۷ میلی‌متر

الف) $۳ / ۴ \times ۲۴' / ۳۵' \ , \ ۱ / ۵''$ ب) $۳ / ۴ \times ۲۴' / ۳۵' \ , \ ۴ / ۵''$

ج) $۵ / ۱ \times ۱۸' / ۲۲' \ , \ ۱ / ۵''$ د) $۵ / ۱ \times ۱۸' / ۲۲' \ , \ ۴ / ۵''$

۳۲- تابش خط ۲۱ سانتی‌متری هیدروژن معمولاً از کدام‌یک از منابع زیر بیشتر است.

الف) ابرهای هیدروژن خنثی HI ب) ابرهای هیدروژن یونیده HII

ج) ابرهای هیدروژن مولکولی $H_۲$ د) هسته‌های کهکشانی فعال

۳۳- ماخ اگر دو جزیره در اقیانوس آرام با مختصات $\begin{Bmatrix} ۵۵^\circ / ۵ \ N \\ ۱۳۵^\circ / ۲۵ \ W \end{Bmatrix}$ و $\begin{Bmatrix} ۲۵^\circ \ S \\ ۱۷۰^\circ \ W \end{Bmatrix}$ نقاط مبدأ و مقصد یک کشتی باشند. کوتاه‌ترین مسیری که این کشتی می‌تواند طی کند چند کیلومتر است؟

الف) ۲۹۵۰ ب) ۴۴۰۰ ج) ۵۹۰۰ د) ۹۵۰۰

۳۴- ماخ فرض کنید ستاره‌ای مانند خورشید، در ابتدای شکل‌گیری، کره‌ای به شعاع یک واحد نجومی بوده است؛ که در اثر انقباض گرانشی در حال حاضر به شعاع فعلی رسیده است. اگر تمام انرژی گرانشی آزاد شده به‌صورت تابش و با آهنگ $L = ۱۰^{۲۶}$ وات گسیل شود، این فرایند چه مدت طول می‌کشد؟

الف) $۱۰^۴$ سال ب) $۱۰^۶$ سال ج) $۱۰^۸$ سال د) $۱۰^{۱۰}$ سال

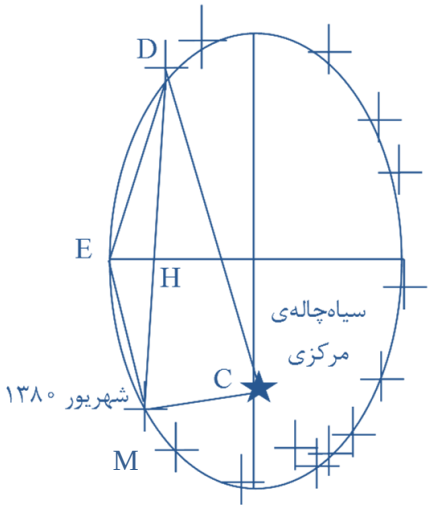
۳۵- ماخ فردی بالای برجی به ارتفاع ۴۰۰ متر ایستاده است. کل مساحتی از سطح زمین که این شخص می‌تواند ببیند تقریباً چند کیلومتر مربع است؟

الف) ۴۰۰۰ ب) ۸۰۰۰ ج) ۱۲۰۰۰ د) ۱۶۰۰۰

کلید سؤالات

۱ الف ب **د** هـ	۲۱ الف ب ج **هـ**	۴۱ الف ب ج د هـ
۲ **الف** ب ج د هـ	۲۲ **ج** الف ب د هـ	۴۲ الف ب ج د هـ
۳ الف ب **د** هـ	۲۳ **ب** ج د هـ	۴۳ الف ب ج د هـ
۴ الف ب ج **هـ**	۲۴ **ب** ج د هـ	۴۴ الف ب ج د هـ
۵ الف ب **د** هـ	۲۵ الف ب ج **هـ**	۴۵ الف ب ج د هـ
۶ **الف** ب ج د هـ	۲۶ الف ب ج **هـ**	۴۶ الف ب ج د هـ
۷ **الف** ب ج د هـ	۲۷ الف ب ج **هـ**	۴۷ الف ب ج د هـ
۸ **الف** ب ج د هـ	۲۸ **ج** الف ب د هـ	۴۸ الف ب ج د هـ
۹ **الف** ب ج د هـ	۲۹ **ج** الف ب د هـ	۴۹ الف ب ج د هـ
۱۰ الف ب **د** هـ	۳۰ الف ب ج **هـ**	۵۰ الف ب ج د هـ
۱۱ الف ب **د** هـ	۳۱ **ب** ج د هـ	۵۱ الف ب ج د هـ
۱۲ الف ب **د** هـ	۳۲ **ب** ج د هـ	۵۲ الف ب ج د هـ
۱۳ الف ب ج **هـ**	۳۳ الف ب ج **هـ**	۵۳ الف ب ج د هـ
۱۴ الف ب ج **هـ**	۳۴ **د** الف ب هـ	۵۴ الف ب ج د هـ
۱۵ الف ب ج **هـ**	۳۵ الف ب ج **هـ**	۵۵ الف ب ج د هـ
۱۶ الف ب **د** هـ	۳۶ الف ب ج د هـ	۵۶ الف ب ج د هـ
۱۷ الف ب **د** هـ	۳۷ الف ب ج د هـ	۵۷ الف ب ج د هـ
۱۸ **الف** ب ج د هـ	۳۸ الف ب ج د هـ	۵۸ الف ب ج د هـ
۱۹ الف ب ج د هـ	۳۹ الف ب ج د هـ	۵۹ الف ب ج د هـ
۲۰ الف ب **د** هـ	۴۰ الف ب ج د هـ	۶۰ الف ب ج د هـ

۱- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.



مقدار روز نوری در این تصویر برابر ۱ اینچ است؛ طبق قانون دوم کپلر، می‌دانیم که ستاره در زمان‌های مساوی مساحت‌های مساوی را جاروب می‌کند، پس داریم: $\frac{S_۱}{T_۱}=\frac{S_۲}{T_۲}$؛ بنابراین به‌راحتی با استفاده از قوانین کسرها و جمع در مخرج به کسر $\frac{S_۱}{S}=\frac{T_۱}{T}$ می‌رسیم که در آن $S_۱$ مساحت طی شده در زمان داده شده در مسئله و S کل مساحت جاروب شده در دوره تناوب است. برای محاسبه مساحت طی شده از تقریب ساده‌ای استفاده می‌کنیم. بعد از رسم خطوط بین ستاره و سیاه‌چاله‌ی مرکزی در تاریخ‌های فروردین ۷۰ و شهریور ۸۰ متوجه می‌شویم که این خطوط بر هم عمودند. با رسم خطی بین این دو موقعیت می‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل داد که با یک تقریب می‌توان مساحت آن را برابر با مساحت قطاعی از بیضی دانست در بین این دو تاریخ قرار دارد.

$$S_۱=S_{\Delta CDM}+S_{\Delta DME}=\frac{۱}{۲}CD\times CM+\frac{۱}{۲}DM\times EH$$

که در آن با استفاده از خط کش طول مقادیر را چنین برآورد می‌کنیم؛ $CD=۴/۵;CM=۲;DM=۵;EH=۰/۵$ و طول قطرهای اطول و اصغر به ترتیب، $a=۳\ ;\ b=۲$ است. تمامی این مقادیر به روز نجومی داده‌شده است؛ بنابراین:

$$\frac{\frac{۱}{۲}CD\times CM+\frac{۱}{۲}DM\times EH}{\pi ab}=\frac{T_۱}{T}$$

با مشخص کردن فاصله زمانی بین فروردین ۷۰ تا شهریور ۸۰ می‌توان به‌جای $T_۱$ مقدار معادل ۳۸۰۰ روز را جایگذاری می‌کنیم. برای ساده‌سازی در این مرحله از محاسبه همچنان از مقیاس روز نوری استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۴/۵+۱/۲}{۶\pi}=\frac{۳۸۰۰}{T}\quad\Rightarrow\quad T\approx ۱۲۵۶۰\ \text{روز}=۱/۰۸\times۱۰^{۹}\ \text{ثانیه}$$

قبل از محاسبه نهایی از رابطه $x=ct$ مقدار مسافت یک روز نوری را محاسبه نموده و به عدد تقریبی $x\approx ۲/۵۹\times۱۰^{۱۳}$ متر می‌رسیم. مرحله نهایی جایگذاری مقادیر به‌دست‌آمده در قانون سوم کپلر است؛

$$\frac{GM}{۴\pi^{۲}}=\frac{a^{۳}}{T^{۲}}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{۴\pi^{۲}}{G}\times\frac{a^{۳}}{T^{۲}}$$

$$M=\frac{۴(۳/۱۴)^{۲}}{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}}\times\frac{(۳\times۲/۵۹\times۱۰^{۱۳})^{۳}}{(۱/۰۸\times۱۰^{۹})^{۲}}=۲/۳۷\times۱۰^{۳۵}$$

حال تنها کافی است که نسبت جرم به‌دست‌آمده را به جرم خورشید محاسبه کنیم.

$$\frac{M}{M_{\odot}}=\frac{۲/۳۷\times۱۰^{۳۵}}{۲\times۱۰^{۳۰}}=۱/۱۸\times۱۰^{۵}$$

این تقریب برای جرم سیاهچاله، دست پایین است. چون مساحت ناحیه‌ی جاروب شده، تقریبی به‌دست‌آمده بود، بنابراین گزینه‌ی ج پاسخ صحیح است.

۲- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

ابتدا با استفاده از رابطه‌ی روشنایی، قدر مطلق خورشید را برآورد می‌کنیم.

$$m_\odot - M_\odot = ۵\log d - ۵ \Rightarrow -۲۶/۸ - M_\odot = ۵\log\frac{۱}{۲۰۲۶۵} - ۵ \quad \Rightarrow \quad M_\odot \approx ۴/۸$$

حال با توجه به دانستن قدر مطلق ستاره‌ها، درخشندگی هر دو گونه‌ی ستاره‌ای موجود در خوشه را از $M - N = -۲/۵\log\frac{L_M}{L_N}$؛ اندازه می‌گیریم:

$$M_۱ - M_\odot = -۲/۵\log\frac{L_۱}{L_\odot} \Rightarrow ۳/۳ - ۴/۸ = -۲/۵\log\frac{L_۱}{۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}} \quad \Rightarrow \quad L_۱ \approx ۱/۵\times۱۰^{۲۷}$$
$$M_۲ - M_\odot = -۲/۵\log\frac{L_۲}{L_\odot} \Rightarrow ۰/۷ - ۴/۸ = -۲/۵\log\frac{L_۲}{۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}} \quad \Rightarrow \quad L_۲ \approx ۱/۵\times۱۰^{۲۸}$$

در انتها نیز برای برآورد کل قدر مطلق خوشه، درخشندگی کل خوشه را با توجه به کل تعداد ستاره‌های هر گونه‌ی طیفی به دست آورده و سپس مشابه روش بالا از رابطه‌ی قدر مطلق-درخشندگی، مقدار مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$L_{Total} = ۲۰۰L_۱ + ۲۰L_۲ = ۳\times۱۰^{۲۹} + ۳\times۱۰^{۲۹} = ۶\times۱۰^{۲۹} \Rightarrow$$
$$M_{Total} - M_\odot = -۲/۵\log\frac{L_{Total}}{L_\odot} \Rightarrow M_{Total} - ۴/۸ = -۲/۵\log\frac{۶\times۱۰^{۲۹}}{۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}} \Rightarrow M_{Total} = -۳/۱۸$$

۳- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

میزان کاهش شدت تابش نسبت به تابش اولیه، $I = I_\circ \times e^{-k\lambda}$ است. با توجه به رابطه‌ی قدر-روشنایی داریم:

$$m - m_\circ = -۲/۵\log\frac{I}{I_\circ} = -۲/۵\log\frac{I_\circ\times e^{-k\lambda}}{I_\circ} = -۲/۵\log e^{-k\lambda} \Rightarrow$$
$$m - m_\circ = \Delta m = (-۲/۵)(-k_\lambda)\log e = ۱/۰۷۵\,k_\lambda$$

۴- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

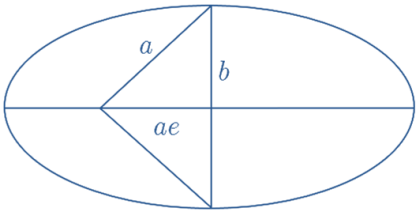
دمای سطح سیاره، با توجه به شار تابشی رسیده به کل مساحت سطح ستاره و ضریب بازتابش سطحی از رابطه‌ی؛ $\frac{L}{۴\pi d^۲}\times(۱-A)\times۴\pi R_p^۲$ به دست می‌آید. از طرفی کل این تابش رسیده به گرما تبدیل می‌شود، بنابراین باید آن‌را با عبارت $\sigma T_p^۴\times۴\pi R_p^۲$ که دمای سیاره را توصیف می‌کند، برابر قرار دهیم.

$$\frac{L}{۴\pi d^۲}\times۴\pi R_p^۲ = ۴\pi R_p^۲\sigma T^۴ \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{۱۶\pi d^۲} = \sigma T^۴$$

از طرف دیگر، فاصله‌ی سیاره در حضیض و در دمای بیشینه $d = a(۱-e)$ و در اوج یعنی دمای کمینه، $d = a(۱+e)$ است؛ بنابراین داریم:

$$(\frac{T_{\max}}{T_{\min}})^۴ = \frac{\frac{L}{۴\pi\sigma d_{\min}^۲}}{\frac{L}{۴\pi\sigma d_{\max}^۲}} = (\frac{d_{\min}}{d_{\max}})^۲ = (\frac{a(۱-e)}{a(۱+e)})^۲ \Rightarrow \frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \sqrt{\frac{۱۱}{۹}}$$

۵- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.



از قانون دوم کپلر می‌دانیم، $\frac{T_۱}{T_۲}=\frac{S_۱}{S_۲}$؛ بنابراین بعد از افراز بیضی و به کمک مثلث‌های موجود در شکل روبرو، برای نسبت مساحت‌ها چنین می‌نویسیم:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۲(\frac{\pi ab}{۴}+\frac{abc}{۲})}{۲(\frac{\pi ab}{۴}-\frac{abc}{۲})}=\frac{\frac{\pi}{۴}+\frac{e}{۲}}{\frac{\pi}{۴}-\frac{e}{۲}}$$

از طرفی چون $e=\frac{\pi}{۳۰}$، خواهیم داشت: $\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۶۰}}{\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶۰}}=\frac{۸}{۷}$

۶- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

برای محاسبه‌ی توان تابش زغال باید مساحت کل قطعه ($S=۶\times r^۲=۶\times(۱۰^{-۲})^۲=۶\times۱۰^{-۴}m^۲$) را در توان تابش واحد سطح یعنی $\sigma T^۴$، ضرب کنیم. برای این کار ابتدا باید با استفاده از قانون وِین، دمای زغال را برآورد کنیم:

$$\lambda_{max}=\frac{۲/۹\times۱۰^{-۳}}{T_{max}}\text{ m}\quad\Rightarrow\quad T_{max}=\frac{۲/۹\times۱۰^{-۳}}{۲۰۰۰\times۱۰^{-۹}}=۱/۴۵\times۱۰^۳$$

بنابراین داریم؛

$$L=S\sigma T^۴=۶\times۱۰^{-۴}\times۵/۶۷\times۱۰^{-۸}\times(۱/۴۵\times۱۰^۳)^۴=۱۵۰W$$

۷- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

منظور سؤال همان ماهواره‌های سنکروترون (زمین ثابت) است؛ در مورد این ماهواره‌ها سرعت زاویه‌ای باید با سرعت زاویه‌ای زمین برابر باشد و شرط حضور این ماهواره‌ها دایروی بودن مدارشان به دور زمین است؛ یعنی: $\omega=\omega_\oplus\Rightarrow\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{T_\oplus}\Rightarrow T=T_\oplus$. پس دوره تناوب آن‌ها با دوره تناوب زمین برابر است. از طرفی از قانون سوم کپلر می‌توان فاصله‌ی ماهواره را محاسبه نمود.

$$\frac{r^۳}{T^۲}=\frac{GM}{۴\pi^۲}\quad\Rightarrow\quad r=\sqrt[۳]{\frac{GMT^۲}{۴\pi^۲}}$$

با جایگذاری ثوابت به مقدار ۴۲۱۶۱ کیلومتر برای شعاع مدار سیاره از مرکز زمین می‌رسیم؛ که با کاستن شعاع زمین این مقدار برابر ۳۵۷۸۶ کیلومتر از سطح زمین می‌شود. در مورد قسمت دوم، می‌توان گفت مسیر ماهواره دایره‌ای است که بر بالای استوای زمین قرار دارد؛ اما چون فاصله‌ی این ماهواره به نسبت ستاره‌های آسمان بسیار کمتر است، با جابه‌جایی در عرض‌های جغرافیایی مختلف، موقعیت ظاهری این ماهواره در آسمان ناظر و نسبت به استوای سماوی تغییر می‌کند؛ یعنی فقط در عرض جغرافیایی (۰) درجه میل آن برابر صفر است و میل ماهواره الزاماً صفر نخواهد بود. توجه داشته باشید که میل در این سؤال به معنی انحراف مداری نیست.

۸- گزینه ب پاسخ صحیح است.

در این سؤال فقط با جایگذاری شماره ترازها خواهیم داشت؛ $E_۴ = \frac{E_۰}{۱۶}$; $E_۲ = \frac{E_۰}{۴}$ ؛ بنابراین برای اختلاف این انرژی‌ها، داریم:

$$\Delta E = E_۰\left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۶}\right) = \frac{۳}{۱۶}E_۰ = \frac{۳}{۱۶} \times ۱۳/۶ eV = ۲/۵۵ eV$$

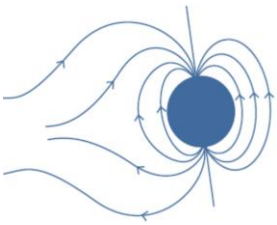
با توجه به داده‌های ارائه‌شده در ثوابت باید مقدار انرژی را برحسب ژول به دست می‌آوریم؛

$$\Delta E = ۲/۵۵ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} = ۴/۰۸ \times ۱۰^{-۱۹} J$$

از طرف دیگر می‌دانستیم مقدار انرژی هر فوتون، $E = \frac{hc}{\lambda}$ برابر است با انرژی آزادشده‌ی فوتون‌ها:

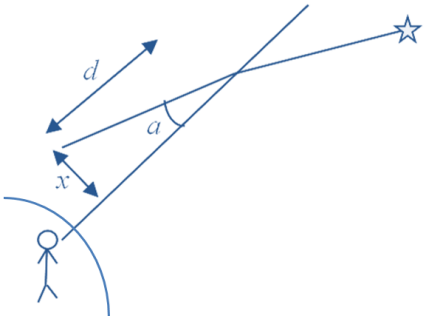
$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴} \times ۳ \times ۱۰^{۸}}{۴/۰۸ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۴۸۷ nm$$

۹- گزینه ب پاسخ صحیح است.



چگالی میدان در نواحی قطبی قوی‌تر است و بنابراین تنها گزاره‌ی غلط گزینه ۲ است. شکل روبرو میدان مغناطیسی پیرامون زمین را به‌صورت شماتیک نشان می‌دهد.

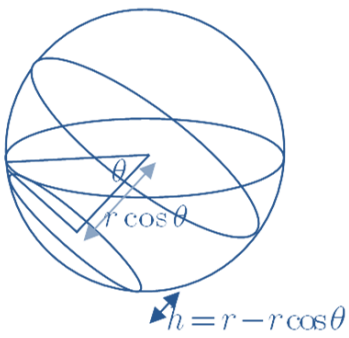
۱۰- گزینه ج پاسخ صحیح است.



ابیراهی عبارت است از جابجایی ظاهری ستاره تحت تأثیر دو پارامتر سرعت نور ستاره که به‌صورت خطی به ناظر نزدیک می‌شود و حرکت مماسی ناظر (در این سؤال به‌واسطه‌ی حرکت وضعی زمین) که در شکل روبرو؛ به دو مؤلفه‌ی سازنده‌اش تجزیه شده است. برای سرعت خطی گردش وضعی زمین در استوا از رابطه‌ی $v = \frac{۲\pi R_\oplus}{T_\oplus} = ۴۶۵ m/s$ ؛ و برای سرعت نور داریم؛ $d = ct$ در نتیجه:

$$\sin a = \frac{x}{d} = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c} = \frac{۴۶۵ m.s^{-۱}}{۳ \times ۱۰^{۸} m.s^{-۱}} \Rightarrow a = ۸/۸ \times ۱۰^{-۵} rad = ۰/۳۲''$$

۱۱- گزینه ج پاسخ صحیح است.



در تهران ستارگانی با میل ۳۵ درجه‌ی شمالی به بالا دورقطبی هستند. حال باید مساحت عرقچین بخش بالایی کره را محاسبه و نسبتش به مساحت کل کره را محاسبه نماییم. مساحت عرقچین کره بدین روش محاسبه می‌شود: $S = ۲\pi hR$ و مقدار مطلوب ما:

$$\frac{S}{S'} = \frac{۲\pi hR}{۴\pi R^۲} = \frac{h}{۲R} \quad ; \quad h = R - R\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{S'} = \frac{۱ - \cos\theta}{۲} = ۰/۰۹$$

است اما باید توجه داشته باشید که دقیقاً به همین مقدار ستاره‌ی دورقطبی قطب جنوب هم وجود دارد که آن‌ها هم طلوع و غروب ندارند. پس باید مقدار حاصل را دو برابر کنیم.

۱۲- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

کهکشان ما تقریباً ۲۰۰ میلیارد ستاره دارد که با دقت خوبی می‌توان گفت همه‌ی آن‌ها خورشید گون‌اند. فاصله‌ی نپتون از ما هم تقریباً ۳۰ واحد نجومی است. از طرف دیگر می‌نویسیم برای نیروها چنین می‌نویسیم:

$$F = Ma = \frac{GmM}{r^۲} \Rightarrow a = \frac{Gm}{r^۲}$$

در نتیجه داریم؛

$$\frac{a_G}{a_\odot} = \frac{\frac{m_G}{r'^۲}}{\frac{m_\odot}{r^۲}} = \frac{\frac{۲۰۰\times۱۰^۹\, m_\odot}{(۱۰^۴\, pc \times ۳/۰۹\times۱۰^{۱۶}\frac{m}{pc})^۲}}{\frac{m_\odot}{۳۰\times(۱/۵\times۱۰^{۱۱})^۲}} = ۲۱\times۱۰^{-۳۱}\times۶۷/۵\times۱۰^{۲۲} = ۱/۴\times۱۰^{-۶}$$

۱۳- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

با توجه به تقریبی بودن این سؤال و توزیع گزینه‌ها با مرتبه ۱۰۰ می‌توان از ساده‌سازی استفاده نمود. یک راه ساده‌سازی، در نظر گرفتن حالت استاتیک است. یعنی در این حالت از سرعت ستاره‌ها در چرخ کهکشانی و همچنین از سرعت عبور عمودی ستاره صرف‌نظر می‌کنیم. قدم بعدی ساده‌سازی را در شکل یک کهکشان انجام می‌دهیم. برای این ساده‌سازی به‌جای شکل حال حاضر کهکشان از یک استوانه بهره می‌بریم.

برای حل سئول می‌توانیم استوانه‌ای به قطر ۱ واحد نجومی در نظر بگیریم که با استوانه بزرگ‌تری با عنوان صفحه‌ی ستاره‌ای راه‌شیری برخورد می‌کند. قطر این استوانه در حدود ۱۰۰۰۰۰ سال نوری است و ضخامت آن به‌طور میانگین ۱۰۰۰ سال نوری است. پس برای حجم آن می‌توانیم به دست آوریم؛ $S_G = \pi\times(۱۰۰,۰۰۰)^۲\times۱,۰۰۰ = \pi\times۱۰^{۱۳}\, ly^۳$. از طرف دیگر، تخمین زده‌شده که کهکشان راه‌شیری ۲۰۰ تا ۴۰۰ میلیارد (۴۰۰×۱۰^۹) ستاره دارد. حال می‌توانیم چگالی ستاره‌ای در کهکشان راه‌شیری را به دست آوریم:

$$\rho_{Star} = \frac{N_{Star}}{V_G} = \frac{۴\times۱۰^{۱۱}}{\pi\times۱۰^{۱۳}} \approx ۱۰^{-۲}$$ ستاره بر سال نوری مکعب

در مرحله بعد باید سطح مقطع برخورد را محاسبه کنیم که استوانه‌ای است به شعاع ۱ واحد نجومی $(۱Au \approx ۱/۵\times۱۰^{-۵}ly)$ و به ارتفاع ۱۰۰۰ سال نوری؛ بنابراین داریم:

$$V_{Cross\ Section} = \pi\times(۱/۵\times۱۰^{-۵})^۲\times۱۰۰۰ \approx ۱۰^{-۷}\, ly^۳$$

آخرین مرحله محاسبه تعداد ستاره‌های موجود در حجم موردنظر است، چراکه می‌دانیم اگر ستاره‌ای در محدوده موردنظر باشد با ستاره‌ی عبوری ما برخورد می‌کند.

$$P = V_{Cross\ Section}\times\rho_{Star} = ۱۰^{-۷}\times۱۰^{-۲} \approx ۱۰^{-۹}$$

اگر حرکت ستاره‌ها را نیز در نظر بگیریم احتمال از این مقدار هم کمتر می‌شود.

۱۴- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

$$G = ۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\frac{m^۳}{kg.s^۲}\times\frac{۱pc^۳}{(۳/۰۹\times۱۰^{۱۶})^۳m^۳}\times\frac{۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}kg}{۱M_\odot}\times\frac{(۳\times۱۰^{۱۳})^۲s^۲}{Myr^۲}=۴\times۱۰^{-۳}=۰/۰۰۴\frac{pc^۳}{M_\odot.Myr^۲}$$

۱۵- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

توان تولیدی در واحد جرم یعنی نسبت درخشندگی به جرم. در مورد جرم و درخشندگی خورشید که همه‌چیز معلوم است. برای محاسبه‌ی توان تابشی بدن انسان، آن را استوانه‌ای با دمای ۳۷ درجه‌ی سانتی‌گراد در نظر می‌گیریم. حال مساحت بدن انسان را به‌صورت استوانه‌ای به ارتفاع ۱/۸ متر و شعاع ۳۰ سانتی‌متر در نظر می‌گیریم؛ جرم تقریبی بدن انسان هم ۸۰ کیلوگرم است؛

$$\frac{P_\odot}{P_b}=\frac{\frac{L_\odot}{M_\odot}}{\frac{L'}{M_b}}=\frac{\frac{۴\pi R_\odot^۲\sigma T_\odot^۴}{M_\odot}}{\frac{S_b\sigma T_b^۴}{M_b}}=\frac{\frac{۴\pi\times(۶/۹۶\times۱۰^۸)^۲\times(۵/۷\times۱۰^۳)^۴}{۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}kg}}{\frac{۲\pi\times۰/۶\times۱/۸\times(۲۷۳+۳۷)^۴}{۸۰kg}}=\frac{۳/۲\times۱۰^۳}{۶/۸\times۱۰^۸}\approx۱۰^{-۵}$$

۱۶- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

ابتدا با دانستن دمای تابش زمینه‌ی کیهانی، طول‌موج این تابش را از قانون وِین چنین به دست می‌آوریم؛

$$\lambda_{\max}=\frac{۰/۰۰۲۹}{T_{\max}}\Rightarrow\lambda_{\max}=۱۰^{-۳}m$$

حال انرژی هر فوتون مطابق با طول‌موج بالا را از رابطه‌ی $E=\frac{hc}{\lambda}$؛ برابر اندازه ۲×۱۰^{-۲۲}، می‌گیریم. در آخر هم برای محاسبه‌ی تعداد فوتون‌ها، چگالی کل انرژی موجود در عالم را از $u=aT^۴=\frac{۴\sigma}{c}T^۴$؛ به دست می‌آوریم؛ این مقدار $۴\times۱۰^{-۱۴}J$ است. مقدار مطلوب چنین خواهد بود:

$$\%=\frac{u}{E}=\frac{۴\times۱۰^{-۱۴}}{۲\times۱۰^{-۲۲}}=۲\times۱۰^۸m^{-۳}=۲۰۰cm^{-۳}$$

۱۷- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

از قانون بقای تکانه‌ی زاویه‌ای داریم: $P_a=P_p$ یعنی؛ $r_a\times v_a=r_p\times v_p$ از طرف دیگر می‌دانیم سرعت در حضیض بیشینه و در اوج کمینه است، بنابراین می‌توانیم چنین بنویسیم: $\frac{v_a}{v_p}=\frac{v_{\min}}{v_{\max}}=\frac{r_a}{r_p}=\frac{۱+e}{۱-e}$. از طرفی از بقای انرژی داریم:

$$\frac{۱}{۲}v_p^۲-\frac{GM}{r_p^۲}=-\frac{GM}{۲a}\quad;\quad\frac{۱}{۲}v_a^۲-\frac{GM}{r_a^۲}=-\frac{GM}{۲a}$$

از حل عددی این سه معادله، خواهیم داشت:

$$e=۰/۷۹\ ,\ a=۱/۶۷\times۱۰^{۱۱}m=۵۵۶\sec ly\ \Rightarrow\ r_{\min}=a(۱-e)=۱۱۶\sec ly$$

۱۸- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

با فرض مکانیک نیوتنی و قانون بقای انرژی، کل انرژی قبل و بعد از خروج فوتون از چنگ گرانش ستاره برابر است؛ از طرفی هر فوتون در میدان‌های گرانشی شدید دو سهم انرژی دارد، یک سهم ناشی از انرژی پتانسیل کشنده‌ی ستاره و سهم دیگر انرژی جنبشی فوتون است، بنابراین داریم:

$$E = K + U = h\nu_1 - \frac{GMm_{photon}}{R}$$

با نوشتن پایستگی انرژی و با توجه به اینکه در حالت دوم، فوتون تحت گرانش ستاره نیست یعنی فاصله‌ی شعاعی به بی‌نهایت میل می‌کند:

$$h\nu_1 - \frac{GMm_{photon}}{R_1} = h\nu_2 - \frac{GMm_{photon}}{R_2} \quad ; \quad R_2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad h\Delta\nu = \frac{GMm_{photon}}{R_1}$$

و به‌جای جرم فوتون، از رابطه‌ی نسبیتی انرژی معادلش را جایگزین می‌کنیم:

$$E = mc^2 \; ; \; E = h\nu \quad \Rightarrow \quad m = \frac{h\nu}{c^2}$$

پس از جایگذاری در عبارت فوق؛

$$h\Delta\nu = \frac{GMh\nu}{c^2R} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{Rc^2} = \frac{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\times۲\times۱۰^{۳۰}}{۲\times۱۰^{۶}\times۹\times۱۰^{۱۶}} = ۰/۱\%$$

۱۹- ماخ گزینه - پاسخ صحیح است. (حذف سؤال)

اگر در حالت کلی و در تمامی عرض‌های جغرافیایی موضوع را بررسی کنیم، زهره می‌تواند از سمت‌الرأس هم بگذرد؛ اما احتمالاً منظور طراح بیشترین ارتفاع در هنگام غروب یا طلوع خورشید بوده است که در آن صورت با صرف‌نظر از موقعیت راصد بیشترین مقدار مطلوب ۴۸ درجه خواهد بود.

۲۰- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

۲۱- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

برای طولانی‌تر شدن خورشیدگرفتگی تنها کافی است زمین در حضیض و ماه در اوج باشد؛ اما در این سؤال و با توجه به گزینه‌ها نیازی به محاسبه‌ی فاصله‌های اوج و حضیض هم نبود. اگر همه‌چیز را در حالت میانگین در نظر می‌گرفتید اختلاف قطر ظاهری ماه و خورشید $۵\times۱۰^{-۴}Rad$ می‌شد که با یک تناسب ساده با فرض دوره تناوب ۲۹/۵ روزه برای ماه به عددی در حدود ۲۰۰ ثانیه می‌رسیدید که تنها از گزینه‌ی د کوچک‌تر بود. در مورد این سؤال باید توجه داشته باشید که ما از اختلاف ارتفاع نسبت به سطح زمین (محاسبات زمین‌مرکز و ناظر مرکز) یا ... صرف‌نظر کرده‌ایم اما واقعیت به گونه‌ی دیگری است و ما خورشیدگرفتگی‌های طولانی‌تری را نیز تجربه کرده‌ایم.

۲۲- ماخ گزینه ب پاسخ صحیح است.

ابتدا از روشنایی ستاره‌ای با قدر ۶+ انرژی رسیده به مساحت سطح چشم را برآورد می‌کنیم:

$$m - m_{\odot} = -۲/۵ \log \frac{b}{b_{\odot}} \;\; ; \;\; ۶ + ۲۶/۸ = -۲/۵ \log \frac{b}{۱۳۷۰} \;\; \Rightarrow \;\; b = ۱/۰۳ \times ۱۰^{-۱۰} W/m^{۲}$$

$$E_{eye} = b.S = b\pi(\frac{d}{۲})^{۲} \;\; ; \;\; E_{eye} = ۵/۱۷ \times ۱۰^{-۱۵} W$$

انرژی هر فوتون از رابطه‌ی $E = \frac{hc}{\lambda}$ به دست می‌آید که در آن $\lambda \cong ۵۰۰ nm$ برای میانه‌ی بازه‌ی طول‌موج مرئی است. به‌این‌ترتیب برای تعداد فوتون‌ها خواهیم داشت:از طرف

$$n = \frac{E}{E_{photon}} = ۱۰۰۰۰ photon$$

سؤال تعداد چند هزار فوتون را موردنظر داشت که گزینه ب را به‌عنوان پاسخ صحیح نتیجه می‌داد.

۲۳- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

برای تحلیل نمودارها، تغییرات را تقریباً خطی در نظر می‌گیریم. برای نمودار جرم-درخشندگی داریم: $\log \frac{L}{L_{\odot}} = ۴ \log \frac{M}{M_{\odot}}$ و برای نمودار جرم-شعاع داریم: $\log \frac{R}{R_{\odot}} = \log \frac{M}{M_{\odot}}$. پس داریم: $\log \frac{L}{L_{\odot}} = ۴ \log \frac{R}{R_{\odot}}$ از طرف دیگر می‌توانیم بنویسیم؛

$$. L = ۴\pi R^{۲} \sigma T^{۴} \;\; \Rightarrow \;\; \log \frac{L}{L_{\odot}} \propto ۲ \log \frac{R}{R_{\odot}} + ۴ \log \frac{T}{T_{\odot}}$$

پس از جایگذاری نسبت درخشندگی-شعاع، داریم:

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} \propto \frac{۱}{۴} \log \frac{L}{L_{\odot}} + ۴ \log \frac{T}{T_{\odot}} \;\; \Rightarrow \;\; \log \frac{L}{L_{\odot}} \propto \frac{۱۶}{۳} \log \frac{T}{T_{\odot}}$$

همان‌طور که مشخص است، با افزایش دما، درخشندگی نیز همواره افزایش می‌یابد.

۲۴- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

با توجه به‌صورت سؤال می‌توان نوشت؛ $\frac{M}{M_{۰}} = ۹$ که در آن M جرم در حالت تفکیکی و $M_{۰}$ جرم در حالت یکپارچه است. M را می‌توان جمع جرم پوسته یا M_C با جرم هسته M_c در نظر گرفت. جرم هسته طبق توضیحات مسئله چنین خواهد بود: $M_{۰} = \rho_{۰} \times \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ پس در مجموع می‌توانیم بنویسیم:

$$M = M_C + M_c \;\; \Rightarrow \;\; m\rho_{۰} \times \frac{۴}{۳}\pi(\frac{r}{n})^{۳} + \rho_{۰} \times \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}(۱ - (\frac{۱}{n})^{۳}) = ۹\rho_{۰} \times \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \;\; \Rightarrow$$

$$m(\frac{۱}{n})^{۳} + (۱ - (\frac{۱}{n})^{۳}) = ۹ \;\; \Rightarrow \;\; (m-۱)(\frac{۱}{n})^{۳} = ۸ \;\; \Rightarrow m = ۸n^{۳} + ۱$$

که بهترین نمودار برای توصیف این معادله، نمودار شماره‌ی ۱ است.

۲۵- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

کافی است یک خط عمودی را به‌عنوان مرجع مقایسه‌ی چگالی در نظر بگیریم؛ مثلاً $r = r_{\circ}$. هر ستاره‌ای که جرم یا چگالی بیشتری داشته باشد، عمر کمتری خواهد داشت. پس ستاره‌ی چهارم پاسخ مسئله است.

۲۶- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

میدان دید چشمی تلسکوپ وابسته به میدان دید چشمی (FOV) و بزرگنمایی است.

$$\text{میدان دید چشمی} = {}^{\text{FOV}}/_{\text{بزرگنمایی}}$$

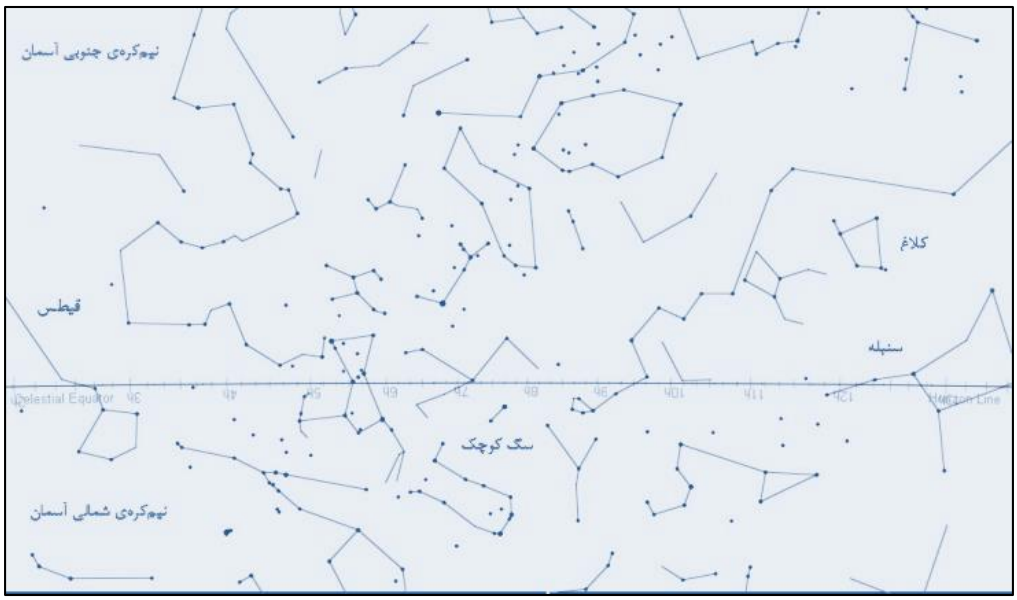
بزرگنمایی نیز وابسته به فاصله کانونی تلسکوپ و فاصله کانونی چشمی است.

$$\text{بزرگنمایی} = {}^{\text{فاصله کانونی تلسکوپ}}/_{\text{فاصله کانونی چشمی}}$$

با توجه به روابط فوق و داده‌های مسئله، ابتدا از رابطه‌ی اول بزرگنمایی را به دست آورده و سپس از رابطه‌ی دوم فاصله کانونی چشمی را به دست می‌آوریم. پاسخ سؤال چشمی ۸۳ میلی‌متر است. درنتیجه در بین گزینه‌ها گزینه‌ی چهارم، یعنی ۸۵ میلی‌متر صحیح است که می‌تواند تمام قرص ظاهری خوشه $M۱۳$ را در میدان دید پوشش دهد.

۲۷- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

در عرض جغرافیایی ۹۰ درجه‌ی جنوبی، فقط صورت فلکی کلاغ به‌طور کامل دیده می‌شود. در مورد صورت‌های فلکی سنبله و نهنگ، فقط بخشی از آن‌ها قابل رؤیت است. تمام محدوده‌ی صورت فلکی سگ کوچک نیز در نیم‌کره‌ی شمالی آسمان است و غیرقابل رؤیت خواهد بود. برای مشاهده‌ی دقیق‌تر جزئیات، به نقشه‌ی زیر دقت کنید:



۲۸- گزینه ب پاسخ صحیح است.

می‌دانیم رابطه‌ی بین ضریب مقیاس $a=(1+z)^{-1}$ است؛ از طرفی عالم کنونی ما در انتقال‌به‌سرخ ۱۱۰۰ قرار گرفته است؛ بنابراین ضریب مقیاس کنونی عالم $a=9\times10^{-4}$ است. از طرفی می‌دانیم $aT=a_0T_0$ و چون ضریب مقیاس در عالم کنونی ۱ است، پس می‌توان نوشت: $T=\frac{T_0}{a}$.

بعد از جایگذاری مقادیر باز هم به پاسخ 10^3 کلوین می‌رسیم.

۲۹- گزینه ب پاسخ صحیح است.

با توجه به فرض راهنمایی ساده کننده‌ی سؤال می‌توان گفت که در هر ثانیه $1\pm0/02$ فوتون بر تراشه فرود می‌آید؛ که این اندازه‌گیری با $n\pm\sqrt{n}$ خطا همراه است. پس می‌توان نوشت:

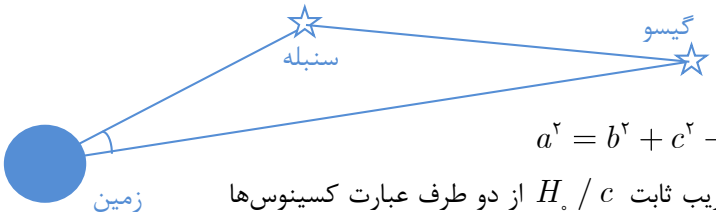
$$\frac{n\pm\sqrt{n}}{n}=1\pm0/02$$

که از اینجا n در حدود ۲۵۰۰ فوتون خواهد بود؛ حال باید توانایی گردآوری نور تلسکوپی با قطر دهانه‌ی ۱ متر را با توانایی گردآوری نور اولیه، مقایسه کنیم:

$$t=\frac{n}{\pi(\frac{d}{2})^2}=\frac{2500}{\pi(\frac{1000}{2})^2}=0/32''$$

۳۰- گزینه د پاسخ صحیح است.

در مورد انتقال‌به‌سرخ می‌دانیم؛ $zc=d$ و از انبساط هابلی می‌دانیم؛ $d=H_0r$ بنابراین می‌توانیم بنویسیم؛ $H_0r=zc$. حال با توجه به شکل زیر و قضیه‌ی کسینوس‌های، خواهیم داشت:



حال رابطه‌ی کسینوس‌ها را چنین می‌نویسیم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$$

بعد از جایگذاری فاصله‌ها، از رابطه‌ی انتقال به سرخ-انبساط هابلی، ضریب ثابت H_0/c از دو طرف عبارت کسینوس‌ها حذف خواهد شد و داریم:

$$a^2=0/02^2+0/004^2-2\times0/02\times0/004\cos30\ \Rightarrow\ a=0/017$$

که این مقدار همان قرمزگرایی یا انتقال‌به‌سرخ گیسو از دید ناظر سنبله است یا بالعکس.

۳۱- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

هر اینچ ۲/۵۴ سانتی‌متر است؛ پس قطر دهانه‌ی تلسکوپ ۳۵/۵ سانتی‌متر خواهد بود. با توجه به رابطه‌ی زیر فاصله‌ی کانونی به دست می‌آید.

$$f = \frac{F}{D} \Rightarrow F = ۳۵۵\,cm = ۳۵۵۰\,mm$$

و همچنین از روابط زوایای کوچک به یاد داریم که $\theta = \frac{a}{D}$ که با استفاده از آن و با توجه به جایگذاری ابعاد فیزیکی CCD به پاسخ‌های ۲۴ و ۳۵ ثانیه خواهیم رسید. در قسمت دوم برای دیدن حداقل توان تفکیک باید تصویر بیش از دو پیکسل را پوشش دهد. حال بعد از انجام محاسبات در روش معکوس حالت اولیه به توان تفکیک حداقلی ۱/۵ ثانیه‌ی قوسی خواهیم رسید.

۳۲- ماخ گزینه الف پاسخ صحیح است.

۳۳- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

کافی است یک مثلث کروی تشکیل دهیم:

$$\cos a = \cos ۳۵ \cos ۱۱۵ + \sin ۳۵ \sin ۱۱۵ \cos ۳۵ \Rightarrow a = ۸۵^{o}$$

با استفاده از تناسب ذیل فاصله برحسب درجه به فاصله برحسب کیلومتر تبدیل می‌شود:

$$x = \frac{۲\pi R_{\oplus}}{۳۶۰} \times ۸۵^{\circ}$$

پاسخ ۹۵۰۰ کیلومتر خواهد بود.

۳۴- ماخ گزینه ج پاسخ صحیح است.

میزان انرژی آزادشده برابر با اختلاف انرژی پتانسیل گرانشی؛ $\Delta E \approx \frac{۳}{۵}\frac{GM^{۲}}{R_{۱}} - \frac{۳}{۵}\frac{GM^{۲}}{R_{۲}}$ است. از طرف دیگر کل این میزان انرژی به‌صورت تابش و با نرخ $\Delta E = L.t$ گسیل می‌شود؛ پس از جایگذاری عددی به پاسخ $۱۰^{۱۵}s$ برابر $۱۰^{۸}$ سال می‌رسیم.

۳۵- ماخ گزینه د پاسخ صحیح است.

مقدار افق منفی به روش زیر حساب می‌شود؛ $\cos\theta = \frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus}+h} = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰+۰/۴} \simeq ۰/۶۴^{\circ}$؛ اما ازآنجاکه مقدار مطلوب مساحت قابل‌مشاهده از دید ناظر است باید مقدار عرقچین قابل مشاهده را از $۲\pi R_{\oplus}^{۲}(۱-\cos\theta)$؛ در این ارتفاع محاسبه نماییم؛ بعد از جایگذاری به پاسخ ۱۶۰۰۰ کیلومتر مربع خواهیم رسید.